

# 光学双稳系统中不稳态的控制<sup>\*</sup>

刘要稳 赵 鸿 汪映海

(兰州大学物理系, 兰州 730000)

(1998 年 7 月 13 日收到; 1998 年 9 月 3 日收到修改稿)

采用一种简便易行的控制方法, 对一个由延时微分方程描述的无穷维光学系统的双稳行为进行控制, 成功地稳定了滞后循环曲线中不稳定的中间态; 抑制了该系统的 Hopf 分岔和倍周期分岔. 这些数值控制结果均是在模拟该光学系统的实验条件下完成的.

PACC: 0540; 4255T; 0545

## 1 引 言

光学双稳系统在光学驱动、光学开关等方面具有广泛的应用前景, 在理论上和实验上一直被受到广泛的重视和研究<sup>[1-7]</sup>. Ikeda 等人<sup>[3]</sup>数值结果表明这种充满非线性介质的光学传输腔, 由于延时反馈导致的双稳驱动可能在某些参数条件下失稳, 并展现出混沌行为. 这一结果不久被 Hopf 等人<sup>[4]</sup>的实验加以证实. 光学双稳系统的 S 形曲线反映了系统的滞后循环性质. 其中上支和下支是稳定的, 从下支到上支的中间支是不稳定的. 在一般的实验条件下是很难得到这种不稳定的中间态. Macke 等人<sup>[7]</sup>利用连续反馈的方法获得了不稳定的中间态, 他们采用的反馈形式为  $p_{i+1} = p_i - \eta x_i$ ,  $x$  为输出信号,  $\eta$  是控制系数且  $\eta > 1/|s_i|$ ,  $|s_i|$  是 S 曲线的中间支的斜率最小值. 当输出信号  $x$  大时, 这种控制形式事实上已经不可避免地改变了系统, 正如他们声称在某些参数下得到的“Title”磁滞现象. 如何寻找一种既不改变原系统又能实现对 S 曲线中间支控制的方法成为一个热门课题.

1990 年, Ott, Grebogi, Yorke (OGY)<sup>[8]</sup>提出了混沌控制理论, 为非线性系统的不稳定轨道(或不动点)的研究开辟了一个崭新的领域. 对于一个  $n$  维系统

$$z_{i+1} = f(z_i, p), \quad (1)$$

其中  $z \in R^n$ ,  $p$  是系统的一个可调参数. 他们的做法是通过参数  $p$  加以扰动

$$p_{i+1} = p_0 + K(z - z^*), \quad (2)$$

来使整个系统稳定到原来不稳定的轨道(或不动点) $z^*$ 上,  $K \in R^n$  为控制系数. 随后的工作者通过引入延迟坐标嵌入技术<sup>[9,10]</sup>和连续反馈技术<sup>[11]</sup>, 扩展了 OGY 控制方法并应用到电子线路环、化学、激光以及心脏系统的研究中. 原则上源于 OGY 控制理论的方法均可以在不改变系统的基础上实现对 S 曲线的不稳态的控制, 但是这些方法大部分需要事先知道控制目标  $z^*$ , 而这对于实验系统, 尤其是高维系统是很难做到的, 甚至是完全无

<sup>\*</sup>国家自然科学基金(批准号: 19675016)和甘肃省自然科学基金(批准号: ZR-97-003)资助的课题.

法实现的. 为了解决这一难题, 赵鸿和汪映海等人<sup>[12]</sup>提出了一种在坐标-参数空间中把控制目标  $z^*$  隐含起来的混沌控制方法. 随后他们又成功地把这一方法应用到切分岔的控制上<sup>[13]</sup>. 他们采用的控制形式是

$$p_{i+1} = p_0 + K(z_{i+1} - z_i) + k'(p_i - p_0). \quad (3)$$

但是无论 OGY 方法还是后来的扩展方法<sup>[8-13]</sup>, 控制系数的求得大都需要事先了解该动力系统的切空间的性质和行为. 最近, 我们提出了一种不需要知道切空间行为便可实现对系统控制的方法<sup>[14]</sup>. 本文的目的是把这种方法应用到一个具有双稳性质的光学系统中, 在其真实的物理实验条件下提取和稳定 S 型曲线的中间不稳态, 并对该系统的 Hopf 分岔和倍周期分岔实现控制.

## 2 控制方法

对于实验系统, 通常只能得到一系列的输出信号  $z_1, z_2, z_3, \dots$ , 其中  $z_i \in R^n$  是一组时间序列变量. Dressler 等人<sup>[9]</sup>提出采用坐标延迟嵌入技术来实现对实验系统控制的目的. 现在介绍一种不需要这种重构技术就能实现对系统控制的方法.

为了简单地介绍方法, 我们以一维时间序列为例.

$$x_{i+1} = f(x_i, p, c), \quad (4)$$

其中  $x_i \in R$ ,  $f$  是一个未知的映射关系,  $p$  是可调参数其调节范围在  $\|p - p_0\| < \delta_0$  ( $\delta_0$  为一小正数),  $c$  为分岔参数( $p$  和  $c$  可以是同一个参数). 对于一维系统, 反馈形式(3)式可以取成

$$p_{i+1} = p_0 + k(x_{i+1} - x_i) + k'(p_i - p_0), \quad (5)$$

其中  $k, k'$  为两个控制系数.

前面已经提到随着参数  $c$  由小到大的变化, S 曲线的稳定下支通过一个切分岔后跃迁到稳定的上支. 关于切分岔失稳的控制, 在文献[13]中根据切分岔点的特性发展了一种方法来实现对 S 曲线的中间不稳定支的控制. 当利用反馈形式(5)式时, 在分岔点附近, 稳定的下支  $x_s$  的控制系数的可控区域和不稳定的中间支  $x_u$  的可控区域之间存在着一个变换关系. 他们已经证明这两个区域之间不相交, 通过控制系数的变换, 可以实现对不稳定支的控制. 但是这种方法比较复杂, 因为我们不得不去解一个 Jacobin 矩阵来得到控制系数  $k$  和  $k'$ . 为了克服这一计算上的麻烦, 最近我们发展了一种非常简便, 不需计算矩阵便可得到控制系数的方法<sup>[14]</sup>. 下面加以简单地介绍.

首先, 确定  $k'$ . 文献[13]已经证明  $x_s$  和  $x_u$  的控制区域被  $k' = 1$  的超曲面分割. 对于一维情况,  $k' = 1$  是一条直线.  $x_s$  的控制区域位于  $k' = 1$  的下方, 而  $x_u$  则位于上方. 当我们用  $k' = 1 - \delta$  来控制时, 如果系统稳定在  $x_s$  上, 这说明  $x_s$  是稳定的, 此时  $x_u$  是不稳定的, 其中  $\delta$  为一小正数. 这时如果我们改用  $k' = 1 + \delta$   $x_s$  自然失稳而系统最终稳定到  $x_u$  上. 因此分别选择  $k' = 1 \pm \delta$  便可实现在稳定态和不稳态之间的切换.

第二步, 确定  $k$ . 首先应该接受这一事实, 控制系数空间的坐标原点  $(k, k') = (0, 0)$  一定位于稳定支  $x_s$  的控制区域内. 这是因为  $k$  和  $k'$  都取成零值时, 根据反馈控制形式(5)式

得  $p = p_0$ , 系统自然稳定到  $x_s$  上. 在切分岔点  $c_b$  时, 坐标原点将会位于这一控制区域的边界上. 在分岔点附近  $c = c_1$  处, 通过在原点附近搜索很容易找到  $x_s$  的可控区域. 之后, 选择一个  $k$ , 记为  $k_1$  ( $k_1$  尽可能取在可控区域的中间位置). 用  $(k, k') = (k_1, 1 + \delta)$  便可实现对不稳定的 S 曲线的中间支的控制. 改变分岔参数  $c$ , 便可得到一段中间支.

最后, 随着参数  $c$  的改变当  $(k, k') = (k_1, 1 + \delta)$  失去控制能力时, 可用  $k_1$  附近的  $k_2$  (在远离原点的方向上) 代替  $k_1$  来继续控制. 依次类推, 便可得到一条完整的 S 曲线的中间支.

上述寻找控制系数的方法同样适用于 Hopf 分岔和倍周期分岔的控制.

另外, 对于高维系统  $z_{i+1} = f(z_i, p, c)$ ,  $z_i \in R^n$ , 反馈控制形式可采用  $p_{i+1} = p_0 + K(z_{i+1} - z_i) + k'(p_i - p_0)$ , 其中  $k'$  的选取与一维情况相同;  $k_i \in K$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) 的选取分别按上述选择  $k$  的方法逐个选取即可. 很多情况下, 高维系统也只需选择一个  $k$  和  $k'$  便可达到控制目的.

3 在延迟系统中的应用

这一方法可以用到 Gibbs 和 Hopf 等人的实验系统中(文献[4] 中图 1(a)), 这一装置由一阶的延迟微分方程来描述, 即

$$\tau' \dot{\varphi}(t) = -\varphi(t) + A^2 \{1 + 2B \cos[\varphi(t - t_R) - \varphi_0]\}.$$
 (6)

其中  $\varphi = \pi V / V_H$ ,  $V$  是调制器的反馈电压,  $V_H$  为半波电压,  $\tau'$  为系统的响应时间,  $B$  是表征调制器的系统参量. 分岔参数  $A^2 = \pi \mu = CG_1 G_2 I_{irr}$  在实验中是可调参数. 实验中取  $B = 0.3$ ,  $\varphi_0 = -\pi/2$ . 如果令  $\tau = \tau' / t_R$ , 对(6)式在单位延迟时间内重新标度, 便可得到

$$\tau \dot{\varphi}(t) = -\varphi(t) + \pi \mu \{1 + 2B \cos[\varphi(t - 1) - \varphi_0]\}.$$
 (7)

由这一方程  $t_0$  时刻的初始值  $\varphi_{t_0}(\theta) = \varphi(t_0 + \theta)$ ,  $-1 \leq \theta \leq 0$ , 通过四阶亚当姆斯(Adam's)数值积分, 我们可以得到  $\varphi(t)$  随时间  $t$  的变化来展示系统的演化过程.

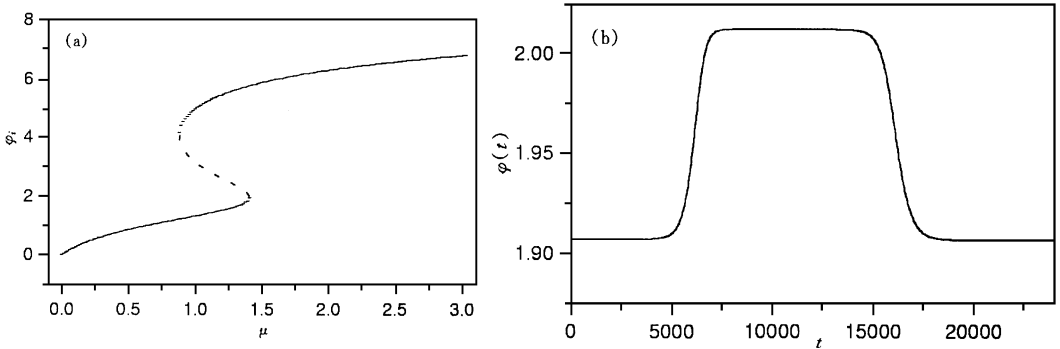


图 1 在  $\tau = 6.25$  时, S 曲线中不稳定的中间态的控制 (a) 输出信号  $\varphi(t)$  随参数  $\mu$  的变化而展现出的典型的双稳现象. 实线表示稳态解, 虚线表示中间支的控制结果. (b) 在不同的控制系数下, 输出信号在稳态解和不稳定解之间切换. 其中  $\mu = 1.40$

### 3.1 稳定 S 曲线的中间态

实验和理论分析都指出此系统存在着滞后循环现象, 如图 1(a). 在这幅图中, 参数  $\tau = 6.25$  (即对应于 Gibbs 等人实验中的  $t_R = 160 \mu s \ll \tau' = 1 \text{ ms}$  的条件, 文献[4] 中的图 1(b)). 当分岔参数  $\mu$  从 0 升到 1.42, 输出信号  $\varphi(t)$  位于稳定的下支(稳态解), 而后当  $\mu$  继续增加,  $\varphi(t)$  则跃迁到上支的稳态解上. 在临界值  $\mu = 1.42$ ,  $\varphi(t)$  从下支转变到上支. 一旦  $\varphi(t)$  落在上支后, 如果降低参数  $\mu$  至 1.42, 系统也不会按原路返回到下支. 而是在  $\mu = 0.9$  时再跳回到下支. 在  $\mu = 0.9$  至 1.42 范围内, 输出信号  $\varphi(t)$  随参数  $\mu$  的变化有一个磁滞过程. 简单的稳定性分析便可知上支和下支是稳定的, 而中间支是不稳定的.

采用上述的控制方法, 对可调参数  $\mu$  在分岔点附近  $\mu = 1.40$  处, 引入反馈控制法则  $\mu_{i+1} = \mu_0 + k(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + k'(\mu_i - \mu_0)$ . 当不加控制(或  $k = -0.6$ ,  $k' = 0.98$ )时, 系统稳定在下支的稳态解上; 在某一时刻, 加以  $k = -0.6$ ,  $k' = 1.02$  的控制, 这时下支的稳态解失稳, 系统自动地锁定到不稳定的中间态上, 如图 1(b). 当系统稳定以后, 如果把控制系数调成  $k = -0.6$ ,  $k' = 0.98$ , 则系统又会回到下支的稳态解上. 因此通过加以  $k = -0.6$ ,  $k' = 1.02$  的控制, 可实现在 S 曲线下支和中间支之间的切换. 在系统稳定在中间态上时, 如果我们逐渐地降低参数  $\mu$  至 0.9, 系统将会随参数  $\mu$  变化而输出一条完整的 S 曲线的中间态, 如图 1(a).

在另一实验条件  $\tau = 0.2$  (即  $t_R = 5 \mu s$ ) 下, 我们采用上述的控制方法也得到了一条完整的中间态, 如图 2(a). 在这幅图中, 每过单位延迟时间我们记录一个  $\varphi(t)$ , 即  $\varphi_i$ , 同时加上一次控制.

### 3.2 抑制 Hopf 分岔

实验证明, 在  $\tau = 0.2$ ,  $\mu = 1.12$  时, 上支的稳态解通过一个 Hopf 分岔失稳而形成极限环(即方波), 而后极限环再经过倍周期分岔过程进入混沌. 在某些情况下, 分岔现象会给实验带来麻烦, 为此就需想办法使系统消除分岔. 对于 Hopf 分岔, 可以采用上述的方法对其进行抑制. 在分岔参数  $\mu = 1.13$  处(已处在极限环态), 采用反馈形式(5)式其中取  $k = 0.17$ ,  $k' = 0$ , 便可抑制这个 Hopf 分岔, 使系统仍稳定到上支的稳态解上. 图 2(b)展现了这一抑制过程. 当放弃控制时, 系统又回到极限环状态. 通过改变  $k$  和  $k'$  可以把上支的稳态控制到  $\mu = 1.2$ .

### 3.3 抑制倍周期分岔

在  $\tau = 0.2$ ,  $\mu = 1.24$  处, 周期 1 的极限环发生第一次倍周期分岔进入周期 2, 而后经过一系列倍周期分岔到达混沌区, 如图 2(a). 但是采用单位延迟时间内记录  $\varphi_i$  的方法很难展现这一倍周期分岔过程, 为此把庞加莱(Poincaré)截面法引入到延迟系统中<sup>[13]</sup>. 这里作简单介绍.

令  $\varphi_t(\theta) = \varphi(t + \theta)$ ,  $-1 \leq \theta \leq 0$ , 当  $t_1 < t_2$  时, 数值积分方程(7),  $\varphi_{t_1}(\theta)$  唯一地确定  $\varphi_{t_2}(\theta)$ . 选取一个截面  $\varphi_c \in R$ , 积分方程(7)直到  $\varphi(t) > \varphi_c$ ,  $\varphi(t+h) < \varphi_c$ , 其中  $h$  为积分

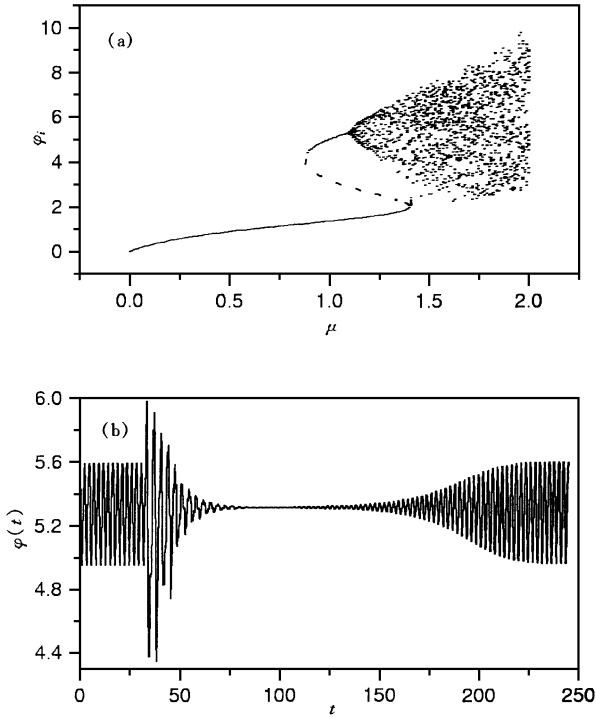


图 2 在  $\tau=0.2$  时, S 曲线中不稳定的中间态以及 Hopf 分岔的控制 (a) 上支的稳态解通过 Hopf 分岔失稳产生极限环, 而后经过倍周期分岔过程进入混沌. 其中虚线表示中间态的控制结果. (b) 在不同的控制系数下, 输出信号在极限环和稳态解之间切换, 其中  $\mu=1.13$

步长. 这说明这两步之间经过了一次截面, 缩小步长以便精确地到达截面且记为  $\varphi_{t_1}(0)=\varphi_c$ , 从截面点  $\varphi_{t_1}(0)$  起向后记录单位时间的  $\varphi_{t_1}(\theta)$ ,  $-1\leq\theta\leq0$ , 为简单起见, 把  $\varphi_{t_1}(\theta)$  记成  $\varphi_i(\theta)$ ; 继续积分当再一次经过截面后用同样的方法可得到  $\varphi_{i+1}(\theta)$ . 这样延尺微分方程的解经 Poincaré 截面方法后简化成  $\varphi_i(\theta)\rightarrow\varphi_{i+1}(\theta)$ ,  $(-1\leq\theta\leq0)$ , 即一段曲线到一段曲线的映射. 在实际积分中可选取  $\theta_j\in(-1,0)$ ,  $j=1,2,3,\dots,n$ ,  $n$  足够大, 这样曲线到曲线的映射变成在  $R^n$  空间中点到点的映射. 由于  $n$  为无穷大, 所以延迟系统是无穷维系统. 经过上述方法后, (7) 式的周期 1 的极限环解有  $\varphi_i(\theta)=\varphi_{i+1}(\theta)$ , 相应的周期  $N$  的解存在  $\varphi_i(\theta)=\varphi_{i+N}(\theta)$ . 这样可以按照常微分方程的做法选取其中的某一个坐标  $\theta_1$ ,  $[\theta_1\in(-1,0)]$  随参数的变化来得到分岔图. 在图 3(a) 中, 取  $\theta_1=-0.2$ , 显然这一分岔图比较直观的展现了延迟方程的倍周期分岔过程.

在  $\mu=1.25$ , 引入  $k=0.2$ ,  $k'=0$ , 本来处于二周期极限环的系统被稳定到一周期的极限环上; 当稳定以后, 如果放弃控制, 则系统又会回到周期二状态, 如图 3(b) 和 (c). 图 3(b) 是取过 Poincaré 截面后得到的  $\varphi_i(-0.2)$ , 用  $\varphi_i(-0.2)$  随经过截面的次数  $i$  变化来反映的这一开关过程. 图 3(c) 是用  $\varphi(t)$  随时间  $t$  的变化来展示这一过程. 从图中可以看出, 采用这一控制方法可以实现对倍周期分岔进行抑制. 数值结果显示, 采用这种控制方

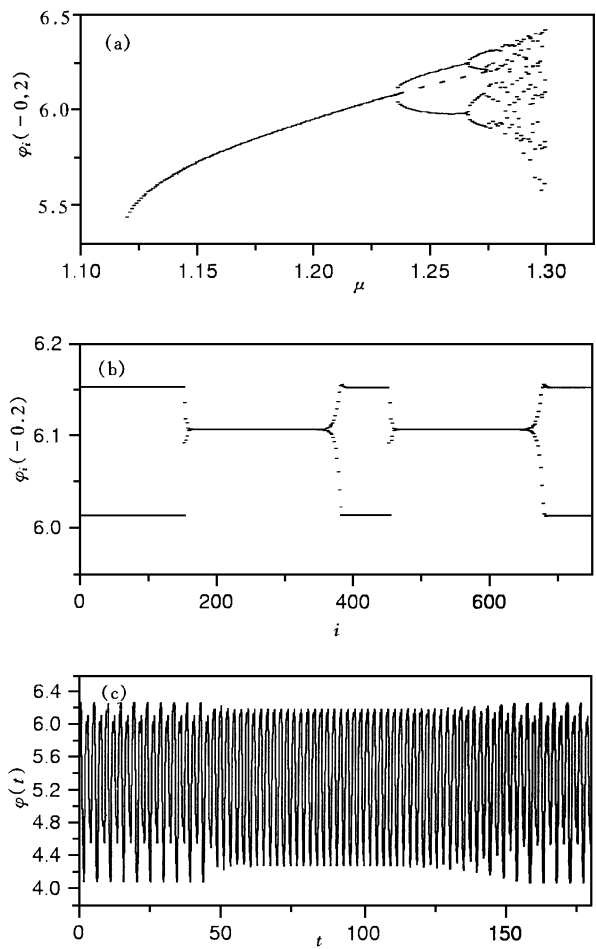


图 3 在  $\tau=0.2$  时, 倍周期分岔的控制 (a) Poincaré 截面后的倍周期分岔图, 其中虚线表示中间支的控制结果. (b)和(c)为二周期和一周期极限环之间的切换,  $\mu=1.25$

法可以把倍周期分岔抑制到  $\mu=1.28$ (混沌区), 如图 3(a)中的点线.

4 结 论

本文采用一种简便易行的控制方法, 成功地稳定了滞后循环现象中的不稳定的中间态; 并且这种方法同样可以适用于对 Hopf 分岔和倍周期分岔的抑制. 所有这些数值结果均是在模拟 Gibbs 等人的物理实验条件下完成的. 本文的方法应用到张洪均等人提出的混合光学双稳系统<sup>[5]</sup>, 得到了同样的数值结果. 这种方法主要有以下优点:

- (1) 这一控制方法不改变原系统. 因为它所用的反馈形式是 OGY 方法的推广, 其中的  $\|p_i - p_0\| < \delta$ 可以保证这一不变性.
- (2) 这种反馈形式隐含了控制目标  $z^*$ , 从而为难以获得控制目标的实验系统提供了

一种可行方案.

(3) 控制方法不需要坐标嵌入技术, 不需要知道系统的切空间行为, 而是由连续两次输出信号  $x_i$ ,  $x_{i+1}$  和本次的可调参数  $p_i$ , 通过反馈形式(5)式便可简单地得到下一次参数的调节值  $p_{i+1}$ . 这为那些由于输出信号性能差而无法采用嵌入技术的系统的控制提供了一种新思路.

(4)  $k$ ,  $k'$  的选取不需烦琐的矩阵计算, 而只需依法试上几个值便可很快得到, 从而为真实的实验系统带来了方便. 在实验设计中, 只需按反馈形式(5)式设计一个反馈回路即可,  $k$ ,  $k'$  在设计时可看成可调的信号放大器装置.

- [1] G. M. Gibbs, S. L. McCall, T. N. C. Venkatesan, *Phys. Rev. Lett.*, **36**(1976), 1135.
- [2] L. A. Lugiato, L. M. Narducci, D. K. Bandy, C. A. Pennise, *Opt. Comm.*, **43**(1982), 281.
- [3] K. Ikeda, H. Daido, O. Akimoto, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1980), 709; **49**(1982), 1467.
- [4] H. M. Gibbs, F. A. Hopf, D. L. Kaplan, R. L. Shoemaker, *Phys. Rev. Lett.*, **46**(1981), 474; F. A. Hopf, D. L. Kaplan, H. M. Gibbs, R. L. Shoemaker, *Phys. Rev.*, **A25**(1982), 2172.
- [5] H. J. Zhang *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **33**(1984), 1024; **34**(1985), 992.
- [6] J. N. Li and B. L. Hao, *Commun. Theor. Phys.*, **11**(1989), 265.
- [7] B. Macke, J. Zemmouri, N. E. Fettouhi, *Phys. Rev.*, **A47**(1993), R1609.
- [8] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 1196.
- [9] U. Dressler, G. Nitsche, *Phys. Rev. Lett.*, **68**(1992), 1.
- [10] B. J. Gluckman, M. L. Span, W. M. Yang, M. Z. Ding, V. In, W. L. Ditto, *Phys. Rev.*, **E55**(1997), 4935.
- [11] K. Pymagas, *Phys. Lett.*, **A170**(1992), 421; **180**(1993), 99.
- [12] H. Zhao, J. Yan, J. Wang, Y. H. Wang, *Phys. Rev.*, **E53**(1996), 299.
- [13] H. Zhao, Y. H. Wang, Z. B. Zhang, *Phys. Rev.*, **E57**(1998), 5358.
- [14] H. Zhao, Y. W. Liu, H. C. Ping, Y. H. Wang, (to be published).
- [15] H. Zhao, F. Z. Zhang, J. Yan, Y. H. Wang, *Phys. Rev.*, **E54**(1996), 6925.

# CONTROLLING OF THE UNSTABLE STATE IN OPTICAL BISTABLE SYSTEM<sup>\*</sup>

LIU YAO-WEN ZHAO HONG WANG YING-HAI

(*Department of Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000*)

(Received 13 July 1998; revised manuscript received 3 September 1998)

## ABSTRACT

Using a very easy and very convenient method, we controlled the unstable intermediate state of the hysteresis loop in an optical bistable system governed by a delay differential equation. Simultaneously, we also stabilized and suppressed the Hopf bifurcation and double-period bifurcation by this technique. All the numerical results are obtained by simulating the experimental condition of Gibbs *et al.*

**PACC:** 0540; 4255T; 0545

---

<sup>\*</sup>Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19675016) and by the Provincial Natural Science Foundation of Gansu, China (Grant No. ZR-97-003).